第 47 講　空間ベクトル(3)

例題 47 − 1

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．辺 AB を 2：1 に内分する点を P とし，線分 CP を 2：1 に内分する点を Q とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　辺 OA，OB の中点をそれぞれ D，E，辺 OC を 1：2 に内分する点を F とする．3 点 D，E，F を含む平面と線分 OQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 47 ー 1

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．辺 AB の中点を L，辺 AC を 3：2 に内分する点を M，辺 AD を 1：2 に内分する点を N とする．また，三角形 BCD の重心を G とし，3 点 L，M，N を含む平面と線分 AG の交点を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 47 ー 2

四面体 OABC において，$OA=3$，$OB=OC=4$，$\angle BOC=\angle COA=\angle AOB=60^\circ$ である．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 H をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$　の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，s，t，u に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　線分 OH と平面 ABC が垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 47 ー 2

四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とし，平面ABCに点Oから垂線OHを下ろしたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 47 − 3

2 点 A$(5,\ -2,\ -3)$，B$(8,\ 0,\ -4)$ を通る直線に，点 O から垂線 OH を下ろす．このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題47－3

2点A$(1,\ 3,\ 0)$，B$(0,\ 4,\ -1)$を通る直線に，点C$(1,\ 5,\ -4)$から垂線CHを下ろす．このとき，点Hの座標と線分CHの長さを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 47 ー 4

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を S とする．

(1)　S と xy 平面の交わりは円である．この円の中心と半径を求めよ．

(2)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になるとき，k の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 47 ー 4

直径の両端の座標が A(1, 2, 4), B(−5, 8, −2) である球面 S について，次の問いに答えよ．

(1)　S の方程式を求めよ．

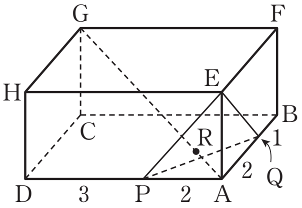
(2)　S と yz 平面の交わりは円である．この円の中心と半径を求めよ．

(3)　S と平面 $y=k$ の交わりが半径 4 の円になるとき，k の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 47 講　空間ベクトル(3)

(1)　右図のような直方体 ABCD-EFGH において，辺 AD を 2：3 に内分する点を P，辺 AB を 2：1 に内分する点を Q とし，3 点 P，Q，E を含む平面と線分 AG の交点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とおくとき，



$\overrightarrow{AR}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$　である．

(2)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\boxed{\text{オ}}$，

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{\text{カ}}$ である．

(3)　中心 (1，−2，3)，半径 4 の球面 S が平面 $x=k$ と交わってできる円の半径が 2 になるとき $k=\boxed{\text{キ}}\pm\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　空間ベクトル(3)

例題47－1

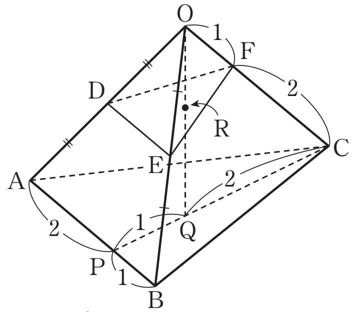
四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする．辺ABを2：1に内分する点をPとし，線分CPを2：1に内分する点をQとする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2)　辺OA，OBの中点をそれぞれD，E，辺OCを1：2に内分する点をFとする．3点D，E，Fを含む平面と線分OQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{OR}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(1)　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}}{3}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{3}\right)+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{9}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}$　……①　とおくと



$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$より

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{2}{9}k\cdot2\overrightarrow{OD}+\dfrac{4}{9}k\cdot2\overrightarrow{OE}+\dfrac{1}{3}k\cdot3\overrightarrow{OF}$

$=\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{OD}+\dfrac{8}{9}k\overrightarrow{OE}+k\overrightarrow{OF}$

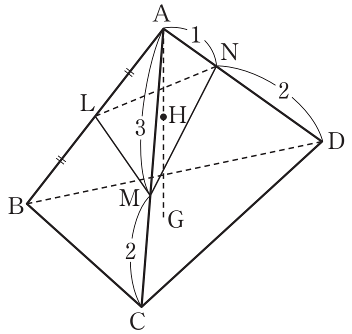
点Rは平面DEF上の点より　$\dfrac{4}{9}k+\dfrac{8}{9}k+k=1$　　よって　$k=\dfrac{3}{7}$

したがって①より　$\overrightarrow{OR}=\boldsymbol{\dfrac{2}{21}\vec{a}+\dfrac{4}{21}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}}$

類題47－1

四面体ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$とする．辺ABの中点をL，辺ACを3：2に内分する点をM，辺ADを1：2に内分する点をNとする．また，三角形BCDの重心をGとし，3点L，M，Nを含む平面と線分AGの交点をHとする．このとき，$\overrightarrow{AH}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を用いて表せ．

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{1}{3}\vec{d}$



$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}+\dfrac{1}{3}k\vec{d}$　……①　とおくと

$\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{5}\vec{c}$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\vec{d}$　より

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}k\cdot2\overrightarrow{AL}+\dfrac{1}{3}k\cdot\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{3}k\cdot3\overrightarrow{AN}$

$=\dfrac{2}{3}k\overrightarrow{AL}+\dfrac{5}{9}k\overrightarrow{AM}+k\overrightarrow{AN}$

点Hは平面LMN上の点より　$\dfrac{2}{3}k+\dfrac{5}{9}k+k=1$　　よって　$k=\dfrac{9}{20}$

したがって①より　$\overrightarrow{AH}=\boldsymbol{\dfrac{3}{20}\vec{b}+\dfrac{3}{20}\vec{c}+\dfrac{3}{20}\vec{d}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 47－2

四面体 OABC において，OA＝3，OB＝OC＝4，∠BOC＝∠COA＝∠AOB＝60° である．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 H をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$　の値を求めよ．

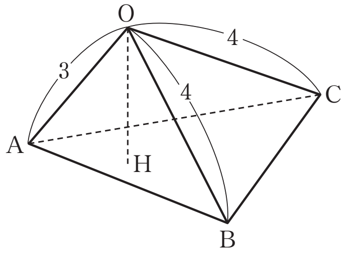
(2)　$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，s，t，u に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　線分 OH と平面 ABC が垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=3\times4\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{6}$　　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=4\times4\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{8}$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60°=4\times3\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{6}$

(2)　点 H は平面 ABC 上の点より　$\boldsymbol{s+t+u=1}$　……①



(3)　OH⊥平面 ABC より　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

よって　$-3s+10t+2u=0$　……②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

よって　$-3s+2t+10u=0$　……③

①×3＋②より　$13t+5u=3$　　　②－③より　$8t-8u=0$　つまり　$t=u$

これらより　$t=u=\dfrac{1}{6}$　　このとき①より　$s=\dfrac{2}{3}$

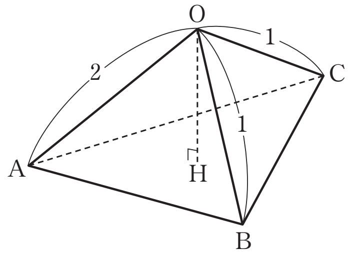
したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}}$

類題 47－2

四面体 OABC において，OA＝2，OB＝OC＝1，∠AOB＝∠AOC＝60°，∠BOC＝90° である．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC に点 O から垂線 OH を下ろしたとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$　　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60°=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$



$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと，

点 H は平面 ABC 上の点より　$s+t+u=1$　……①

OH⊥平面 ABC より　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$　　よって　$3s+u=0$　……②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$　　よって　$3s+t=0$　……③

①，②，③より　$s=-\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{3}{5}$，$u=\dfrac{3}{5}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}}$

例題 47 － 3

2 点 A(5，−2，−3)，B(8，0，−4) を通る直線に，点 O から垂線 OH を下ろす．このとき，点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ．

点 H は直線 AB 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（$t$ は実数）と表せる．

つまり　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　$3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0$　　$t=-1$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ -4,\ -2)$　より　**H(2，−4，−2)**

$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=\boldsymbol{2\sqrt{6}}$

類題 47 － 3

2 点 A(1，3，0)，B(0，4，−1) を通る直線に，点 C(1，5，−4) から垂線 CH を下ろす．このとき，点 H の座標と線分 CH の長さを求めよ．

点 H は直線 AB 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（$t$ は実数）と表せる．

つまり　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(0,\ -2,\ 4)+t(-1,\ 1,\ -1)=(-t,\ -2+t,\ 4-t)$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　$-1\cdot(-t)+1\cdot(-2+t)-1\cdot(4-t)=0$　　$t=2$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-2,\ 0,\ 2)$　より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(1,\ 5,\ -4)+(-2,\ 0,\ 2)=(-1,\ 5,\ -2)$　　よって　**H(−1，5，−2)**

$\mathrm{CH}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 47 − 4

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を S とする．

(1)　S と xy 平面の交わりは円である．この円の中心と半径を求めよ．

(2)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になるとき，k の値を求めよ．

(1)　球面 S の半径を r とすると，

$r=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{2^2+3^2+2^2}=\sqrt{17}$

よって　球面 S の方程式は　$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=17$

この球面 S が xy 平面，すなわち $z=0$ と交わってできる円の方程式は

$(x-1)^2+y^2+3^2=17,\ z=0$　　つまり　$(x-1)^2+y^2=8,\ z=0$

よって　**中心 $(1,\ 0,\ 0)$，半径 $2\sqrt{2}$** の円を表す．

(2)　球面 S が $z=k$ と交わってできる円の方程式は

$(x-1)^2+y^2+(k+3)^2=17,\ z=k$　　つまり　$(x-1)^2+y^2=17-(k+3)^2,\ z=k$

これは　中心 $(1,\ 0,\ k)$，半径 $\sqrt{17-(k+3)^2}$ の円を表す．

半径の条件より　$17-(k+3)^2=1^2$　　$(k+3)^2=16$　　$k+3=\pm 4$

よって　**$k=-7,\ 1$**

類題 47 − 4

直径の両端の座標が $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 4)$，$\mathrm{B}(-5,\ 8,\ -2)$ である球面 S について，次の問いに答えよ．

(1)　S の方程式を求めよ．

(2)　S と yz 平面の交わりは円である．この円の中心と半径を求めよ．

(3)　S と平面 $y=k$ の交わりが半径 4 の円になるとき，k の値を求めよ．

(1)　求める球面の中心 C は，線分 AB の中点より　$\left(\frac{1-5}{2},\ \frac{2+8}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)=(-2,\ 5,\ 1)$

半径は　$\mathrm{AC}=\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

よって求める球面の方程式は　$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27}$

(2)　球面 S が yz 平面，すなわち $x=0$ と交わってできる円の方程式は

$(0+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27,\ x=0$　　つまり　$(y-5)^2+(z-1)^2=23,\ x=0$

よって　**中心 $(0,\ 5,\ 1)$，半径 $\sqrt{23}$** の円を表す．

(3)　球面 S が $y=k$ と交わってできる円の方程式は

$(x+2)^2+(k-5)^2+(z-1)^2=27,\ y=k$

つまり　$(x+2)^2+(z-1)^2=27-(k-5)^2,\ y=k$

これは　中心 $(-2,\ k,\ 1)$，半径 $\sqrt{27-(k-5)^2}$ の円を表す．

半径の条件より　$27-(k-5)^2=4^2$　　$(k-5)^2=11$　　$k-5=\pm\sqrt{11}$

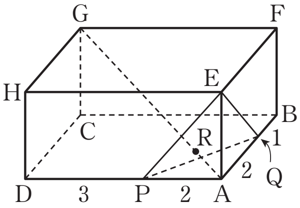
よって　**$k=5\pm\sqrt{11}$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第47講　空間ベクトル(3)

(1)　右図のような直方体 ABCD-EFGH において，辺 AD を 2：3 に内分する点を P，辺 AB を 2：1 に内分する点を Q とし，3 点 P，Q，E を含む平面と線分 AG の交点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とおくとき，



$\overrightarrow{AR}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$　である．

(2)　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\boxed{オ}$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{カ}$ である．

(3)　中心 (1，−2，3)，半径 4 の球面 S が平面 $x=k$ と交わってできる円の半径が 2 になるとき $k=\boxed{キ}\pm\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$ である．

解答例

(1)　$\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$　　$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AG}=k\vec{b}+k\vec{d}+k\vec{e}$　……①とおくと

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\vec{d}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$　より

$$\overrightarrow{AR}=k\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{AQ}+k\cdot\frac{5}{2}\overrightarrow{AP}+k\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}k\overrightarrow{AQ}+\frac{5}{2}k\overrightarrow{AP}+k\overrightarrow{AE}$$

点 R は平面 QPE 上の点より　$\dfrac{3}{2}k+\dfrac{5}{2}k+k=1$　　よって　$k=\dfrac{1}{5}$

したがって①より　$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{d}+\dfrac{1}{5}\vec{e}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times1\times\cos60^\circ=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}|\vec{a}|^2+\frac{1}{3}|\vec{b}|^2-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}=\mathbf{0}$$

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$
$$=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}|\vec{a}|^2+\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}|\vec{c}|^2-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}=\mathbf{0}$$

（よって　$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AC}$　より　$\overrightarrow{OG}\perp$平面 ABC である．）

(3)　球面 S の方程式は　$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$

S が平面 $x=k$ と交わってできる円の方程式は $(k-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$，$x=k$

つまり　$(y+2)^2+(z-3)^2=16-(k-1)^2$，$x=k$

半径の条件より　$16-(k-1)^2=2^2$　　$(k-1)^2=12$　　よって　$k=\mathbf{1\pm2\sqrt{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。